

ЭФФЕКТИВНОЕ ПОДАВЛЕНИЕ ФАЗОВОГО ШУМА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕЙ СИЛЫ В ЛИНЕЙНОМ ОСЦИЛЛЯТОРЕ

Нефедкин Н.Е.^{1,2,3}, Андрианов Е.С.^{1,2}, Пухов А.А.^{2,3}, Виноградов А.П. *^{1,2,3}

¹ Федеральное государственное унитарное предприятие “Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н.Л. Духова”, Москва, Россия

² Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)”, Москва, Россия

³ Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теоретической и прикладной электродинамики Российской академии наук, Москва, Россия

Статья поступила в редакцию 21.06.2023

Одобрена после рецензирования 26.07.2023

Принята к публикации 31.07.2023

Аннотация

В работе рассматриваются вынужденные колебания линейного осциллятора, взаимодействующего с резервуаром, ответственным за диссипацию и шумовое воздействие. Известно, что в случае линейного осциллятора шумы на значения частоты вынужденных колебаний не влияют, а затухание автокорреляционной функции амплитуды не зависит ни от свойств осциллятора, ни от параметров внешнего воздействия, а определяется только шумами. В работе установлено, что, в отличие от амплитуды осциллятора, существуют определённые значения амплитуды и частоты внешнего поля, а также скорости диссипации осциллятора, которые разделяют два различных режима динамики фазы осциллятора. В первом режиме шумы фазы осциллятора и коэффициент диффузии фазы не зависят от свойств внешней силы и определяются взаимодействием осциллятора с резервуаром. Как следствие, автокорреляционная функция косинуса фазы на больших временах затухает. Во втором режиме коэффициент диффузии фазы становится зависящим не только от взаимодействия с резервуаром, но и от параметров внешней силы. Эта зависимость проявляется в том, что в этом режиме коэффициент диффузии уменьшается на два порядка. Как следствие, на больших временах автокорреляционная функция косинуса фазы не затухает, т.е. система «помнит» начальное значение фазы. На языке уравнения Адлера для фазы показано, что переход от первого режима ко второму происходит, когда эффективный потенциал для фазы становится немонотонной функцией.

Ключевые слова: стохастический резонанс, фазовый шум, диффузия фазы, время корреляции фазы, влияние шумов и диссипации на поведение фазы линейного осциллятора

EDN P1NBPE

DOI: 10.24412/2949-0553-2023-35-13-22

Введение

Когерентная динамика открытых систем различной физической природы в последнее время привлекает всё большее внимание [1]. Прежде всего, стоит упомянуть открытые квантовые системы общего вида [2, 3], кубиты [4], химические и биологические системы [5–7].

Квантовая система взаимодействует с многомодовым окружением, становится открытой при попытке исключить из уравнений движения явную зависимость от резервуара. Обычно такое исключение приводит к одновременному появлению потерь и шумов в системе [5, 8]. В ряде случаев их наличие может существенно изменить динамику системы, не взаимодействующей с резервуаром. Потери энергии могут быть компенсированы добавлением активных сред и их накачкой, например, в ламповых генераторах [9], в лазерах [10–12], в активных метаматериалах [13–16], РТ-симметричных системах [17–19] и т.д. В то же время шумы в открытых системах являются более серьёзной проблемой, чем потери. Даже в том случае, когда накачка компенсирует потери энергии, существует конечное время сбоя фазы сигнала,

* Автор, ответственный за переписку: Алексей Петрович Виноградов, a-vinogr@yandex.ru

приводящее к тому, что спектр сигнала системы имеет конечную ширину. Особый интерес представляет класс задач, связанных с эффективным подавлением шумов. В зависимости от системы этого можно добиться разными путями. Например, в лазерах для увеличения времени коррелированности фазы необходимо существенно превзойти порог генерации (закон Шавлова – Таунса). В том случае, когда не удается создать высокий уровень накачки, например, в низкодобротных лазерах [18, 20, 21], в активных метаматериалах [22, 23], могут быть использованы эффекты подавления шума, такие как стохастический резонанс [16], нелинейная фазовая синхронизация [24].

Спектр сигнала в зависимости от класса задач может быть определен разными способами. Одним из основных является амплитудный спектр, определяемый по теореме Винера-Хинчина как фурье-образ автокорреляционной функции амплитуды сигнала. В этом случае описанные выше эффекты подавления шума зависят от нелинейных свойств системы. В случае линейного осциллятора затухание автокорреляционной функции амплитуды определяется только корреляционными свойствами шума и не зависит от свойств осциллятора и параметров внешнего воздействия, так что изменить время затухания амплитуды колебаний, не воздействуя на шумы, не удастся.

Однако во многих ситуациях существенную роль играет не амплитудный, а фазовый спектр. Это имеет место, например, в задачах об эффекте Джозефсона [25, 26], где существенную роль играет разность фаз волновых функций по обе стороны джозефсоновского контакта, в эффекте Саньяка [27, 28], где точность измерения угловой скорости связана с временем корреляции фазы [29]. Отметим, что даже в том случае, когда отклик системы по амплитуде является линейным, фаза отклика нелинейно зависит от параметров внешнего воздействия, и её динамика является нетривиальной [30, 31]. В этой связи интерес представляет задача о возможности увеличения времени корреляции фазы периодическим внешним воздействием.

В настоящей работе исследуются фазовые флуктуации линейного диссипативного осциллятора, взаимодействующего с внешней силой. Установлено, что существуют определённые значения амплитуды и частоты внешнего поля, которые разделяют два различных режима динамики системы. Характерными величинами, которые отличают данные режимы, являются величина коэффициента диффузии фазы и поведение автокорреляционной функции косинуса фазы на больших временах. В первом режиме шумы фазы осциллятора и коэффициент диффузии фазы не зависят от свойств внешней силы. Как следствие, автокорреляционная функция косинуса фазы на больших временах затухает. Во втором режиме шумы подавляются, что проявляется в уменьшении коэффициента диффузии фазы. Как следствие, на больших временах автокорреляционная функция косинуса фазы не затухает, т.е. система «помнит» начальное значение фазы. На языке уравнения Адлера для фазы показано, что переход от первого режима ко второму происходит, когда эффективный потенциал для фазы становится немонотонной функцией.

Поведение линейного осциллятора под воздействием шумов и внешней силы

Рассмотрим осциллятор, на который действует внешняя гармоническая сила. Уравнение его движения имеет вид:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = B \cos \omega t, \quad (1)$$

где ω – частота внешнего гармонического воздействия, ω_0 – собственная частота осциллятора, B – это амплитуда внешней силы. На данном этапе рассматривается осциллятор без потерь. Ниже мы введем резервуар гармонических осцилляторов и покажем, что взаимодействие с таким резервуаром придет к появлению потерь.

Мы будем рассматривать случай, когда частоты осциллятора и внешнего воздействия близки, $|\omega - \omega_0| \ll \omega, \omega_0$. В этом случае возможно перейти к рассмотрению медленных огибающих быстрых колебаний осциллятора, используя метод усреднения Ван-дер-Поля [32]. Действительно, произведём в уравнении (1) замену

$$x(t) = \frac{1}{2} (v(t)e^{i\omega t} + v^*(t)e^{-i\omega t}), \quad (2)$$

считая $v(t)$ медленно меняющейся функцией. Далее, усредняя по периоду внешней силы уравнение (1) и накладывая на новую комплексную переменную $v(t)$ условие [33]

$$\dot{v}(t)e^{i\omega t} + \dot{v}^*(t)e^{-i\omega t} = 0, \quad (3)$$

получаем следующее уравнение:

$$\dot{v} = - \left(i \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega} \right) v - i \frac{B}{2\omega} \approx -i\Delta v - i\Omega. \quad (4)$$

В последнем равенстве мы использовали $|\omega - \omega_0| \ll \omega, \omega_0$ и ввели обозначение для расстройки частот $\Delta = \omega - \omega_0 \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega} = \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{2\omega} \approx \Delta = (\omega - \omega_0)$ и амплитуды внешней силы $\Omega = B/2\omega$.

Теперь рассмотрим взаимодействие осциллятора с резервуаром из гармонических осцилляторов и покажем, что присутствие резервуара приводит к появлению диссипации и случайного шума. Будем полагать, что частоты осцилляторов резервуара равномерно занимают интервал частот $(\omega_0 - \Delta_R, \omega_0 + \Delta_R)$ так, что $|\omega - \omega_0| \ll \Delta_R \ll \omega_0, \omega$. Ещё одно условие на Δ_R , а именно $\Delta_R \gg \gamma, \Delta$, мы получим в конце этого раздела. Так как $|\omega_k - \omega_0| = |\Delta_k| \leq \Delta_R \ll \omega_0, \omega$, то уравнения движения для комплексных медленных амплитуд осциллятора системы и осцилляторов резервуара имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -i\Delta v - i\Omega - i \sum_k \Omega_k z_k(t), \\ \dot{z}_k &= -i\Delta_k z_k(t) - i\Omega_k v(t) \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $|\Delta_k| = |\omega_k - \omega| \ll \omega, \omega_0$ Ω_k – константа взаимодействия осциллятора с k -ой модой резервуара z_k , имеющей частоту $\omega + \Delta_k$. Чтобы получить замкнутое уравнение на амплитуду осциллятора v , нам следует формально проинтегрировать второе уравнение в (5) и подставить его в уравнение на v . Отсюда получаем

$$\dot{v} = -i\Delta v - i\Omega - \sum_k \Omega_k^2 \int_0^t dt' v(t') e^{-i\Delta_k(t-t')} + f_v(t), \quad f_v(t) = -i \sum_k \Omega_k z_k(0) e^{-i\Delta_k t}. \quad (6)$$

Заменяя суммирование по переменным резервуара на интегрирование и предполагая, что резервуар находится в равновесном состоянии, так что

$$\langle z_k(0) \rangle_R = \langle z_k^*(0) \rangle_R = \langle z_k(0) z_k(0) \rangle = \langle z_k^*(0) z_k^*(0) \rangle = 0, \quad \langle z_k^*(0) z_k(0) \rangle = \bar{n}_k \delta_{kk'}, \quad (7)$$

получаем, что $f_v(t)$ удовлетворяет следующим корреляционным соотношениям:

$$\langle f_v(t) \rangle_R = \langle f_v^*(t) \rangle_R = 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \langle f_v^*(t) f_v(t') \rangle_R &= \sum_k \sum_{k'} \Omega_k \Omega_{k'} \langle z_k^* z_{k'} \rangle_R e^{i(\omega_k - \omega)t - i(\omega_{k'} - \omega)t'} = \\ &= \sum_k \Omega_k^2 \bar{n}_k e^{i(\omega_k - \omega)(t-t')} = \int_{\omega_0 - \Delta_R}^{\omega_0 + \Delta_R} \rho(\omega') \Omega^2(\omega') \bar{n}(\omega') e^{i(\omega' - \omega)(t-t')} d\omega' \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь мы ввели плотность состояний $\rho(\omega_k)$ для перехода от суммирования к интегрированию. Далее будем считать функции $\rho(\omega_k)$, $\Omega(\omega_k)$ и $\bar{n}(\omega_k)$ медленно меняющимися на интервале $2\Delta_R$. Тогда, вынося $\rho(\omega_k)$, $\Omega(\omega_k)$ и $\bar{n}(\omega_k)$ из-под знака интеграла и заменяя интеграл от экспоненты дельта-функцией, получаем

$$\langle f_v^*(t) f_v(t') \rangle_R = \rho(\omega_0) \Omega^2(\omega_0) \bar{n}(\omega_0) \int_{\omega_0 - \Delta_R}^{\omega_0 + \Delta_R} e^{i(\omega' - \omega)(t-t')} d\omega'. \quad (10)$$

Далее заметим, что подынтегральная функция, когда рассматриваются времена $t' - t \gg 1/\Delta_R$, является быстроосциллирующей, и основной вклад в интеграл даёт окрестность вблизи точки $\omega' = \omega$. В этом случае мы можем распространить пределы интегрирования до бесконечности и получить:

$$\begin{aligned} \langle f_v^*(t) f_v(t') \rangle_R &\simeq \rho(\omega_0) \Omega^2(\omega_0) \bar{n}(\omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega' - \omega)(t-t')} d\omega' = \\ &= 2\pi \rho(\omega_0) \Omega^2(\omega_0) \bar{n}(\omega_0) \delta(t - t') = 2\gamma \bar{n} \delta(t - t') = 2D \delta(t - t') \end{aligned} \quad (11)$$

где величины γ и D имеют вид

$$\gamma = \pi \rho(\omega_0) \Omega^2(\omega_0), \quad D = \bar{n}(\omega_0) \gamma. \quad (12)$$

Интегрируя обе части (11), можно получить

$$\gamma = \frac{1}{\bar{n}} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f_v^*(t) f_v(t') \rangle_R dt'. \quad (13)$$

Данное выражение связывает скорость затухания системы γ и корреляционную функцию резервуара. Оно является отражением флуктуационно-диссипационной теоремы, связывающей отклик линейной

системы на внешнее воздействие со спектральными характеристиками этой системы в равновесии [34]. Действительно, при наличии какой-либо внешней силы, выводящей систему из равновесия, константа γ будет иметь смысл скорости диссипации.

Уравнение осциллятора с учетом шума примет вид

$$\dot{v} = (-i\Delta - \gamma)v - i\Omega + f_v(t). \quad (14)$$

Данное уравнение описывает процесс Орнштейна-Уленбека для комплексной амплитуды v . Усредняя (14) по различным реализациям, мы приходим к обычному уравнению осциллятора с диссипацией, но уже для средней комплексной амплитуды $\langle v \rangle$. Решение данного уравнения имеет вид [34]:

$$\langle v(t) \rangle = v_0 e^{-t(\gamma+i\Delta)} + \frac{i\Omega}{\gamma+i\Delta}, \quad (15)$$

а автокорреляционная функция амплитуды с учётом (10)

$$\langle v^*(t+\tau)v(t) \rangle = D \exp(-\tau(\gamma+i\Delta)) / (\gamma+i\Delta) + \frac{\Omega^2}{\gamma^2+\Delta^2}. \quad (16)$$

Здесь v_0 — начальное значение амплитуды v . Решение (15) описывает колебания осциллятора на частоте вынуждающей силы. Фурье-преобразование автокорреляционной функции (16) даст сумму δ -функции и лоренцевской линии с шириной γ .

Отметим следующее обстоятельство. При выводе корреляционного свойства (11) предполагалось, что времена t и t' удовлетворяют условию $t' - t \gg 1/\Delta_R$. Динамика автокорреляционной функции корректно воспроизводится формулой (16) только на временах $t' - t \gg 1/\Delta_R$. С другой стороны, из (15) и (16) видно, что характерное время изменения автокорреляционной функции амплитуды есть $1/\gamma$ или $1/\Delta$. Таким образом, необходимо, чтобы выполнялось соотношение $t' - t \ll 1/\gamma, 1/\Delta$. Отсюда получаем, что $\Delta_R \gg \gamma, \Delta$.

Автокорреляционная функция косинуса фазы

Результат, полученный в предыдущем разделе, хорошо известен. Однако, как было отмечено во введении, во многих задачах интерес представляет автокорреляционная функция фазы сигнала. Взяв за отправную точку случайную величину v , мы определяем случайную фазу как $\varphi = \arg v$, а случайную амплитуду как $A = |v|$. В таком случае амплитуда и фаза являются случайными величинами, которым соответствует система уравнений Ланжевена

$$\dot{A} = -\gamma A - \Omega \sin \varphi + f_A(t), \quad \dot{\varphi} = -\Delta - \frac{\Omega}{A} \cos \varphi + \frac{f_\varphi(t)}{A}, \quad (17)$$

получающаяся из (14) путём выделения амплитуды и фазы $v(t) = A(t) \exp(i\varphi(t))$. В данном разделе мы остановимся на более подробном рассмотрении фазовых флуктуаций осциллятора.

Для иллюстрации динамики фазы рассмотрим поведение автокорреляционной функции косинуса фазы:

$$C(t, t+\tau) = \langle \cos \varphi(t) \cos \varphi(t+\tau) \rangle. \quad (18)$$

Автокоррелятор (18) находим численно, моделируя стохастические дифференциальные уравнения (17) на основе разностной схемы, предложенной в [35]. При численном моделировании параметр γ фиксировался, и динамика системы рассматривалась при значении автокоррелятора шума $D = \gamma$. Все физические величины определялись как усреднение по многим независимым реализациям (17).

Оказалось, что при различных значениях расстройки Δ и амплитуды внешней силы Ω имеют место различные типы поведения автокоррелятора косинуса фазы (Рис. 1).

Видно, что, с одной стороны, автокоррелятор косинуса фазы при малой внешней силе экспоненциально спадает во времени (Рис. 3, синяя кривая). Корреляционную функцию (18) можно аппроксимировать как $C(\tau) \sim \langle \cos^2 \varphi(t) \rangle e^{-\alpha\tau}$. Таким образом, влияние шума на осциллятор довольно сильно сбивает его фазу, то есть за характерное время $1/\alpha$ система «забывает» начальную фазу. С другой стороны, при увеличении амплитуды внешней силы Ω автокоррелятор (18) перестает иметь вид затухающей экспоненты и становится осциллирующей с частотой Δ функцией. Это значит, что в ходе эволюции системы фаза не «забывается» под воздействием шума, а наоборот, внешняя сила приводит к подавлению шумовой компоненты и, как следствие, к коррелированности фазы.

Рассмотрим теперь, как зависит амплитуда автокоррелятора косинуса фазы от амплитуды внешней силы Ω . Также зафиксируем диссипацию в системе γ , спектральную плотность шумов D и примем

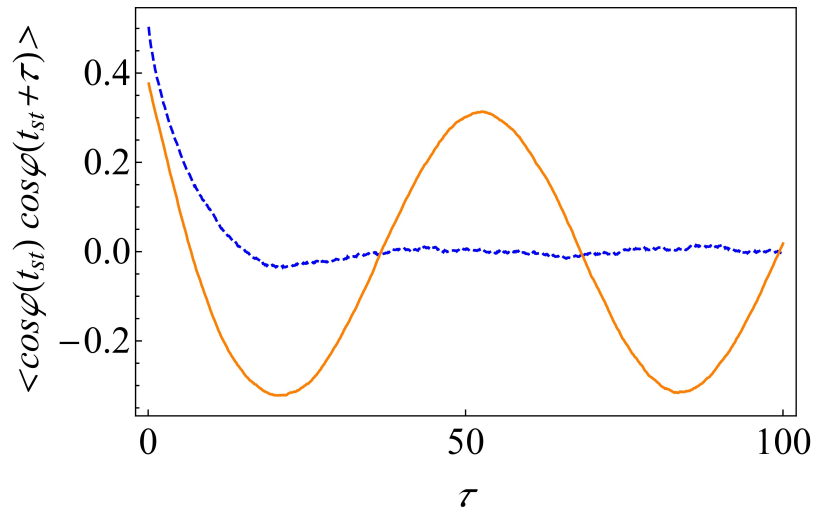


Рисунок 1 – Зависимость автокоррелятора $C(t_{st}, t_{st} + \tau) = \langle \cos \varphi(t_{st}) \cos \varphi(t_{st} + \tau) \rangle$ от времени τ при $D = \gamma$, $\Delta = 0.1$ и при различных значениях внешней силы: $\Omega = 0.05$ – синяя кривая, $\Omega = 1.15$ – оранжевая кривая. t_{st} – время достижения стационара системы

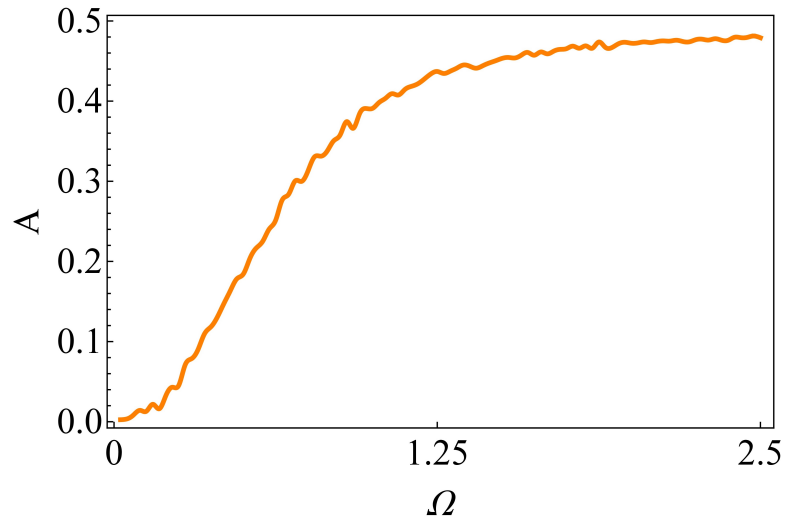


Рисунок 2 – Зависимость амплитуды автокоррелятора косинуса фазы от амплитуды внешней силы Ω

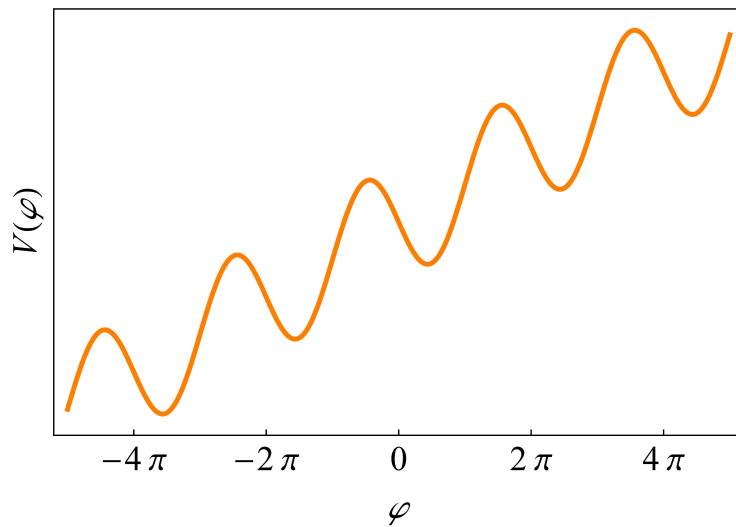


Рисунок 3 – Потенциал $V(\varphi)$, в котором происходит движение разности фаз φ

расстройку равной $\Delta = 0.1$. Данная зависимость представлена на Рис. 2. Поведение, представленное на Рис. 1 и 2, связано с динамикой фазы, которая задается вторым уравнением в (17). На временах $t \gg |1/\gamma|$ при условии малого шума и малой внешней силы в данном уравнении можно заменить $A(t)$ на постоянное значение A_0 . Тогда получим уравнение Адлера для фазы [36]

$$\dot{\varphi} \approx -\Delta - \frac{\Omega}{A_0} \cos \varphi. \quad (19)$$

Уравнение (19) описывает броуновское движение частицы с координатой φ в периодическом потенциале:

$$V(\varphi) = \Delta\varphi + \Omega/A_0 \sin \varphi. \quad (20)$$

В случае, когда $|\Delta| < |\Omega/A_0|$, минимумы потенциала $\varphi_n = -\arccos(-\Delta A_0/\Omega) + 2\pi n$ соответствуют режиму синхронизации, то есть мгновенная разность фаз в отсутствие шума остается постоянной во времени. Влияние же шума приводит к диффузии фазы в потенциале $V(\varphi)$: фаза флуктуирует вблизи минимумов φ_n и может совершать случайные перескоки в соседние потенциальные ямы (см. Рис. 3).

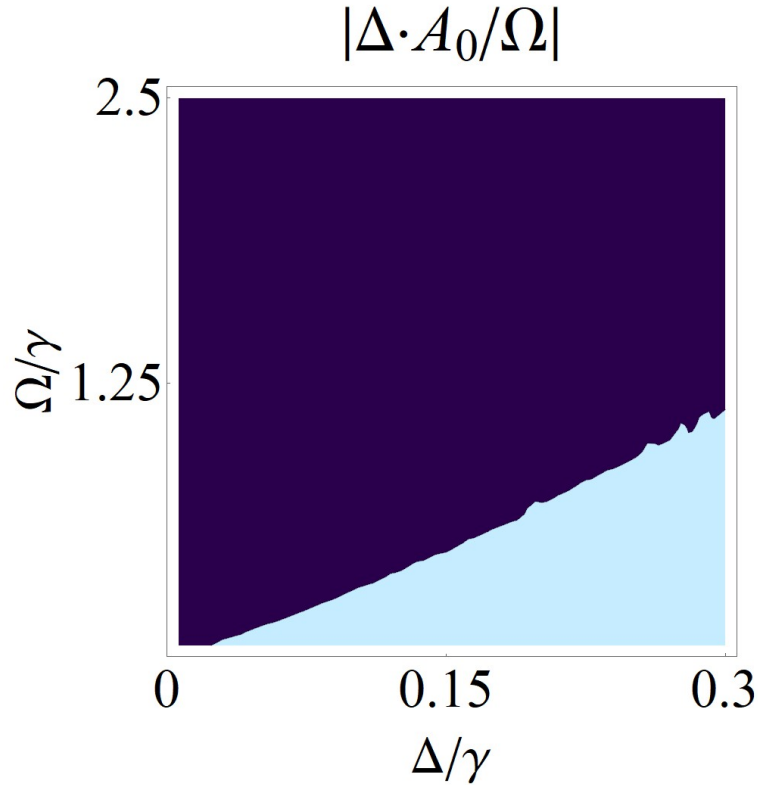


Рисунок 4 – Значение $|\Delta A_0/\Omega|$, определяющее форму потенциала $V(\varphi)$. Белые линии – скорость выхода амплитуды автокоррелятора косинуса фазы на стационарное значение

Оказывается, что скорость выхода амплитуды автокоррелятора косинуса фазы на стационарное значение (Рис. 4) и форма потенциала (рис. 5) связаны друг с другом. Для того чтобы это продемонстрировать, рассмотрим скорость выхода и значение величины $|\Delta A_0/\Omega|$, от которой зависит форма потенциала, на плоскости параметров (Ω, Δ) . На Рис. 6 фиолетовым цветом отмечены значения $|\Delta A_0/\Omega|$, меньше 1, что соответствует существованию минимумов у потенциала $V(\varphi)$. Голубая область соответствует отсутствию потенциальных ям и, как следствие, свободной диффузии фазы вниз по потенциалу.

Оценим среднее время выхода фазы из одной потенциальной ямы и переход её в другую в том случае, когда потенциальные ямы существуют. Для этого воспользуемся моделью Крамерса, с помощью которой скорость скачков фазы можно выразить через параметры потенциала как [10]

$$W = \frac{1}{2\pi} \sqrt{V''_{\min} |V''_{\max}|} \exp\left(-2 \frac{\Delta V}{D}\right), \quad (21)$$

где V''_{\min} и V''_{\max} – вторые производные потенциала по φ , вычисленные в точках минимума и максимума; $\Delta V = V(\varphi^{\max}) - V(\varphi^{\min})$. Вычисляя вторую производную потенциала уравнения (20), получаем

$V'' = -\frac{\Omega}{A_0} \sin \varphi$. Точки минимумов и максимумов имеют вид: $\varphi_n^{\min/\max} = \mp \arccos(-\Delta A_0/\Omega) + 2\pi n$. С учётом этого скорость выхода из минимума потенциала (20) принимает вид:

$$W = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-2\left(2\sqrt{1 - A_0^2 \Delta^2 / \Omega^2} \Omega / A + 2\Delta \arccos(-A_0 \Delta / \Omega)\right) / D\right) \sqrt{1 - \frac{A_0^2 \Delta^2}{\Omega^2}} \Omega / A_0. \quad (22)$$

На плоскости параметров Ω, Δ скорость выхода из потенциальной ямы изображена на Рис. 5.

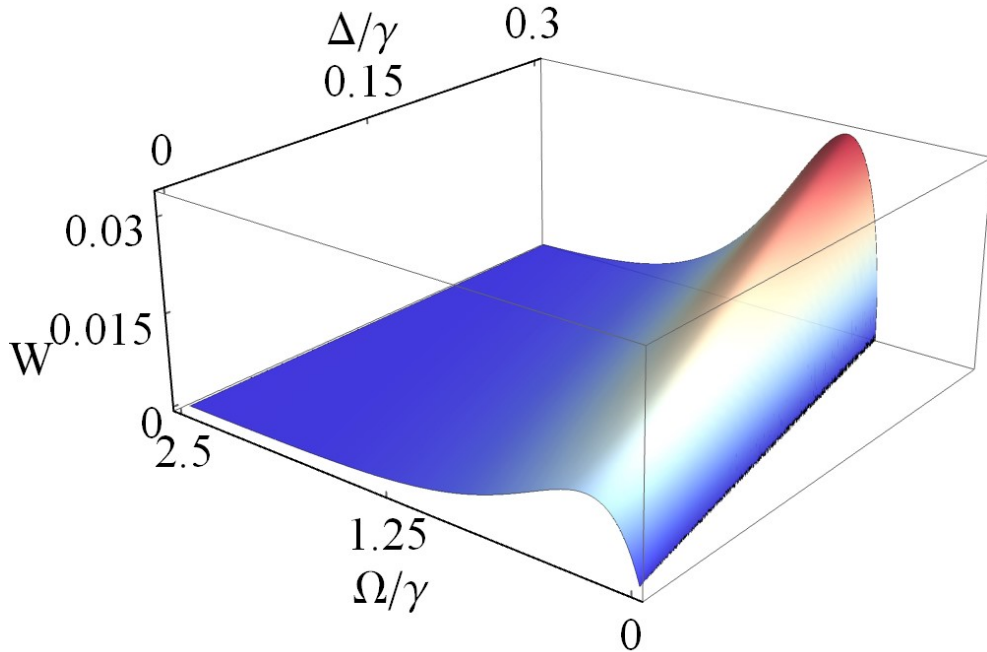


Рисунок 5 – Скорость выхода из потенциальной ямы в зависимости от параметров внешней силы, Ω, Δ при $D = \gamma$

Из Рис. 5 видно, что существует область параметров $|\Delta A_0/\Omega| > 1$, где скорость W не определена. Это соответствует отсутствию локальных минимумов у потенциала (18). Положение области, где W не определена, хорошо согласуется с «языком» Арнольда, полученным на Рис. 4 при тех же параметрах. В области большой амплитуды внешнего поля скорость ожидаемо мала, так как при увеличении Ω глубина потенциальных ям растёт.

Наряду со скоростью выхода из потенциальной ямы существует характеристика, отражающая диффузию фазы осциллятора под воздействием шума $f_\varphi(t)$. Фаза в таком случае диффундирует по закону $\langle \varphi^2 \rangle \sim D_{eff} t$. Эта характеристика определяется как

$$D_{eff} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\langle \varphi^2 \rangle - \langle \varphi \rangle^2 \right), \quad (23)$$

то есть является углом наклона зависимости дисперсии фазы от времени и называется коэффициентом эффективной диффузии. Величина D_{eff} , а соответственно и скорость диффузии, растут вместе с увеличением интенсивности шума и зависят от средней продолжительности захвата фазы: чем длиннее интервалы захвата, тем медленнее растёт дисперсия фазы и меньше коэффициент диффузии. Отметим, что в случае $\Delta = 0$, т.е. резонанса частоты внешней силы и собственной частоты осциллятора, возможно получить аналитическое выражение для эффективной диффузии D_{eff} [36], которое показывает уменьшение D_{eff} до нуля при $\Omega \rightarrow \infty$. Однако для исследования вопроса зависимости D_{eff} как от амплитуды, так и от частоты внешней силы мы воспользуемся численным моделированием, поскольку аналитического выражения при $\Delta \neq 0$ неизвестно.

Для системы (21) результаты численного расчёта D_{eff} представлены на Рис. 6. Из Рис. 6 видно, что существуют две области параметров, отвечающие за наличие и отсутствие локальных минимумов у потенциала. Иными словами, на Рис. 6 мы наблюдаем «язык» Арнольда, как и на Рис. 4, 5. Очевидно, что чем глубже потенциальные ямы в (23), тем медленнее растёт дисперсия фазы и меньше сам коэффициент эффективной диффузии. Поэтому в области больших амплитуд внешней силы и сравнительно небольших расстройках D_{eff}/D практически равен нулю. Наоборот, в области малых амплитуд и больших расстройках нормированный коэффициент эффективной диффузии близок к 1.

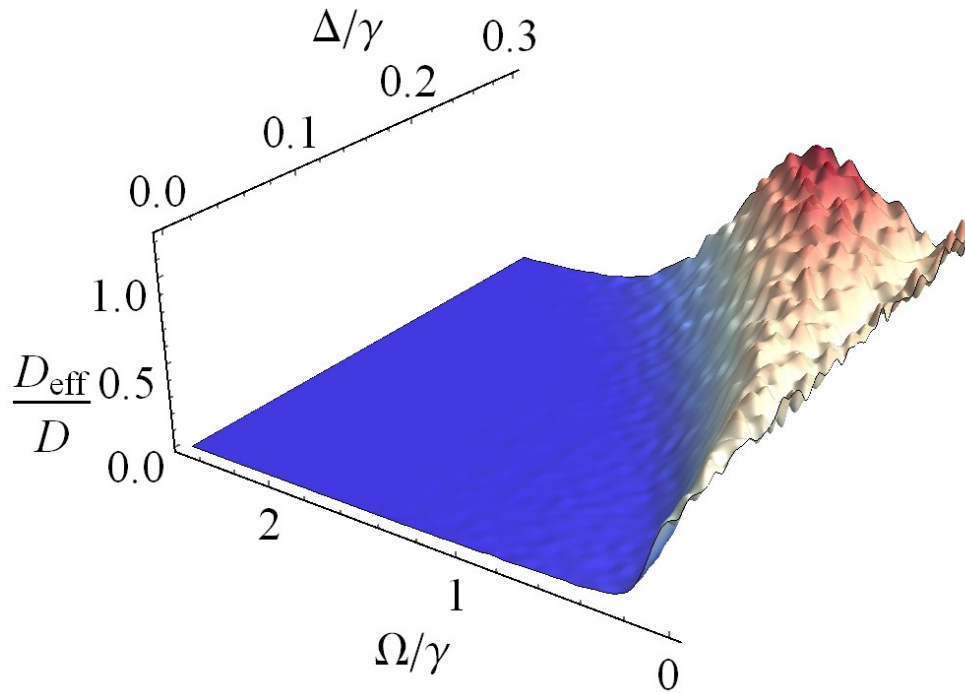


Рисунок 6 – Нормированный коэффициент эффективной диффузии, D_{eff}/D , в зависимости от Ω и Δ при $D = \gamma$

Таким образом, существуют параметры внешней силы, при которых коэффициент эффективной диффузии D_{eff} фазы $\varphi = \arg \nu$ много меньше коэффициента диффузии D для отклика ν . В этой области амплитуда автокоррелятора косинуса фазы выходит на отличное от нуля стационарное значение. Такая область параметров напоминает язык Арнольда для нелинейного осциллятора [36]. Однако отметим, что переход от области параметров, где фаза синхронизована к области отсутствия синхронизации, в отличие от нелинейной синхронизации, происходит непрерывно. Тем не менее, граница между этими двумя режимами достаточно резкая.

Заключение

В работе рассмотрены корреляционные свойства фазы линейного осциллятора, находящегося под одновременным воздействием внешней силы и резервуара. Показано, что эти два режима связаны с видом потенциала фазы в уравнении Адлера. При монотонном потенциале, соответствующем малым внешним воздействиям, фаза свободно диффундирует, что проявляется в затухании автокорреляционной функции на больших временах. С другой стороны, при больших амплитудах внешнего воздействия потенциал принимает немонотонный вид, у него появляются минимумы, что приводит к захвату фазы, т.е. к обращению коэффициента диффузии в ноль. Переход от одного режима к другому, в отличие от нелинейной синхронизации, происходит непрерывно, т.е. не существует резкой границы между режимами. При удалении от границы коэффициент диффузии экспоненциально стремится к нулю. Таким образом, в присутствии внешнего воздействия на осциллятор шумовое влияние резервуара на фазу системы эффективно подавляется.

Список литературы

- [1] Smirne A., Breuer H.-P., Piilo J., Vacchini B. Initial correlations in open-systems dynamics: the Jaynes-Cummings model // *Physical Review A*. – 2010. – Т. 82, № 6. – С. 062114.
- [2] Information dynamics and open systems: classical and quantum approach. / Ingarden R. S., Kossakowski A., Ohya M.: Springer Science & Business Media, 2013. – 324 с.
- [3] Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. / Strogatz S. H.: Westview press, 2014. – 512 с.
- [4] The Theory of Open Quantum Systems. / Breuer H.-P., Petruccione F. – Oxford: Oxford University Press, 2002. – 613 с.
- [5] Quantum theory of open systems. / Davies E. B. – London: Academic Press, 1976. – 171 с.

- [6] Chiorescu I., Bertet P., Semba K., Nakamura Y., Harmans C., Mooij J. Coherent dynamics of a flux qubit coupled to a harmonic oscillator // *Nature*. – 2004. – Т. 431, № 7005. – С. 159-162.
- [7] Lee H., Cheng Y.-C., Fleming G. R. Coherence dynamics in photosynthesis: protein protection of excitonic coherence // *Science*. – 2007. – Т. 316, № 5830. – С. 1462-1465.
- [8] Mabuchi H. Coherent-feedback quantum control with a dynamic compensator // *Physical Review A*. – 2008. – Т. 78, № 3. – С. 032323.
- [9] Marconi U. M. B., Puglisi A., Rondoni L., Vulpiani A. Fluctuation-dissipation: response theory in statistical physics // *Physics reports*. – 2008. – Т. 461, № 4. – С. 111-195.
- [10] Selected problems in the theory of fluctuations in radio engineering. / Stratonovich R. – Moscow: Sovetskoe Radio, 1961.
- [11] Введение в статистическую радиофизику и оптику. / Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. – Москва: Наука, 1981. – 640 с.
- [12] Laser physics. / Sargent M., Scully M. O., Lamb W. E. – London: Addison-Wesley, 1974. – 432 с.
- [13] Optical coherence and quantum optics. / Mandel L., Wolf E. – Cambridge: Cambridge University Press, 1995. – 1166 с.
- [14] Light Vol. 2: Laser light dynamics. / Haken H. – Amsterdam: North-Holland, 1985. – 336 с.
- [15] Hess O., Tsakmakidis K. L. Metamaterials with Quantum Gain // *Science*. – 2013. – Т. 339. – С. 654-655.
- [16] Hess O., Pendry J. B., Maier S. A., Oulton R. F., Hamm J. M., Tsakmakidis K. L. Active nanoplasmonic metamaterials // *Nature Materials*. – 2012. – Т. 11. – С. 573-584.
- [17] Fang A., Koschny T., Soukoulis C. M. Lasing in metamaterial nanostructures // *J. Opt.* – 2010. – Т. 12, № 2. – С. 024013.
- [18] Andrianov E. S., Baranov D. G., Pukhov A. A., Dorofeenko A. V., Vinogradov A. P., Lisyansky A. A. Loss compensation by spasers in plasmonic systems // *Opt. Express*. – 2013. – Т. 21, № 11. – С. 13467-13478.
- [19] Bender C. M., Boettcher S. Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having PT symmetry // *Physical Review Letters*. – 1998. – Т. 80. – С. 5243-5246.
- [20] Bender C. M. Making sense of non-Hermitian Hamiltonians // *Report on Progress Physics*. – 2007. – Т. 70. – С. 947-1018.
- [21] Zyablovsky A. A., Vinogradov A. P., Pukhov A. A., Dorofeenko A. V., Lisyansky A. A. PT-symmetry in optics // *Phys. Usp.* – 2014. – Т. 57, № 11. – С. 1177-1198.
- [22] Noginov M., Zhu G., Belgrave A., Bakker R., Shalaev V., Narimanov E., Stout S., Herz E., Suteewong T., Wiesner U. Demonstration of a spaser-based nanolaser // *Nature*. – 2009. – Т. 460, № 7259. – С. 1110-1112.
- [23] Виноградов А. П., Андрианов Е. С., Пухов А. А., Дорофеенко А. В., Лисянский А. А. Квантовая плазмоника метаматериалов: перспективы компенсации потерь при помощи спазеров // *Успехи физических наук*. – 2012. – Т. 182, № 10. – С. 1122-1130.
- [24] Виноградов А. П., Дорофеенко А. В., Зухди С. К вопросу об эффективных параметрах метаматериалов // *Успехи физических наук*. – 2008. – Т. 178, № 5. – С. 511-518.
- [25] Nefedkin N., Andrianov E., Pukhov A., Vinogradov A. Stochastic resonance in the loss compensation regime of a plasmonic nanolaser // *Physical Review A*. – 2017. – Т. 96, № 3. – С. 033801.
- [26] Анищенко В., Астахов В., Вадивасова Т., Стрелкова Г. Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. – 2009. – Т. 17, № 2. – С. 145-151.
- [27] Coffey W., Dejaridin J.-L., Kalmykov Y. P. Nonlinear noninertial response of a Brownian particle in a tilted periodic potential to a strong ac force // *Physical Review E*. – 2000. – Т. 61, № 4. – С. 4599.
- [28] Coffey W., Dejaridin J.-L., Kalmykov Y. P. Nonlinear impedance of a microwave-driven Josephson junction with noise // *Physical Review B*. – 2000. – Т. 62, № 5. – С. 3480.
- [29] Малыкин Г. Б. Эффект Саньяка во вращающейся системе отсчета. Релятивистский парадокс Зенона // *Успехи физических наук*. – 2002. – Т. 172, № 8. – С. 969-970.
- [30] Малыкин Г. Б. Эффект Саньяка. Корректные и некорректные объяснения // *Успехи физических наук*. – 2000. – Т. 170, № 12. – С. 1325-1349.

- [31] Cresser J., Louisell W., Meystre P., Schleich W., Scully M. Quantum noise in ring-laser gyros. I. Theoretical formulation of problem // *Physical Review A*. – 1982. – Т. 25, № 4. – С. 2214.
- [32] *The Chaotic Pendulum*. / Gitterman M.: World Scientific, 2010. – 158 с.
- [33] *The Langevin Equation With Applications to Stochastic Problems in Physics, Chemistry and Electrical Engineering Second Edition*. / Coffey W. T., Kalmykov Y. P., Waldron J.: World scientific series in contemporary chemical physics, 1996. – 852 с.
- [34] *Нелинейные колебания*. / Кузнецов А., Кузнецов С., Рыскин Н. – Москва: Физматлит, 2005. – 292 с.
- [35] *Quantum optics*. / Scully M. O., Zubairy M. S.: Cambridge University Press, 1997.
- [36] *Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах*. / Анищенко В., Астахов В., Вадивасова Т., Нейман А., Стрелкова Г., Шиманский-Гайер Л. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 544 с.
- [37] *Введение в статистическую радиофизику и оптику* /Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. – Москва: Наука, 1981. – 640 с.

EFFICIENT SUPPRESSION OF PHASE NOISE BY A DRIVING FORCE IN A LINEAR OSCILLATOR

Nefedkin N.E.^{1,2,3}, Andrianov E.S.^{1,2}, Pukhov A.A.^{2,3}, Vinogradov A.P.^{*1,2,3}

¹ Dukhov Research Institute of Automatics, Moscow, Russia

² Moscow institutes of physics and technology, Moscow region, Russia

³ Institute for Theoretical and Applied Electromagnetics of RAS, Moscow, Russia

* a-vinogr@yandex.ru

Abstract

In this work, it is considered forced oscillations of a linear oscillator interacting with a reservoir responsible for dissipation and noise impact. It is known that in the case of a linear oscillator, noise does not affect the frequency of forced oscillations, and the damping of the autocorrelation function of the amplitude does not depend on either the properties of the oscillator or the parameters of the external action, but is determined only by noise. It is shown that, unlike the amplitude of the oscillator, there are certain values of the amplitude and frequency of the external field, as well as the rate of dissipation of the oscillator, which separate two different regimes of the oscillator phase dynamics. In the first regime, the phase noise of the oscillator and the phase diffusion coefficient do not depend on the properties of the external force and are determined by the interaction of the oscillator with the reservoir. As a consequence, the autocorrelation function of the phase cosine decays at large times. In the second regime, the phase diffusion coefficient becomes dependent not only on the interaction with the reservoir, but also on the parameters of the external force. This dependence manifests itself in the fact that in this regime the diffusion coefficient decreases by two orders of magnitude. As a consequence, the autocorrelation function of the phase cosine does not decay at large times; the system "remembers" the initial value of the phase. Using the formalism of the Adler equation for the phase, it is shown that the transition from the first regime to the second one occurs when the effective potential for the phase becomes a nonmonotonic function.

Key words: stochastic resonance, phase noise, phase diffusion, phase correlation time, influence of noises and dissipation on behavior of phase of linear oscillator